

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

# **NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK DARI GRAF SERI PARALEL ( $m, r, 4$ )**

## **TUGAS AKHIR**

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada Program Studi Matematika

Oleh:



**AMINAH UTAMI**  
**11654201549**



UIN SUSKA RIAU

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU  
PEKANBARU  
2021**





Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

## **NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK DARI GRAF SERI PARALEL ( $m, r, 4$ )**

### **TUGAS AKHIR**

Oleh:

**AMINAH UTAMI**  
**11654201549**

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir  
di Pekanbaru, pada tanggal 5 Februari 2021

**Ketua Program Studi**

**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
**NIP. 19811225 200604 2 003**

**Pembimbing**

**Corry Corazon Marzuki, M.Si.**  
**NIP. 19860320 201503 2 003**





## LEMBAR PENGESAHAN

### NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK DARI GRAF SERI PARALEL ( $m, r, 4$ )

#### TUGAS AKHIR

Oleh:

**AMINAH UTAMI**  
**11654201549**

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji  
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
di Pekanbaru, pada tanggal 5 Februari 2021

Pekanbaru, 5 Februari 2021  
Mengesahkan,

Ketua Program Studi

**Ari Pani Desvina, M.Sc.**  
**NIP. 19811225 200604 2 003**

Dekan



**Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.**  
**NIP. 19660604 199203 1 004**

#### DEWAN PENGUJI:

**Ketua : Dr. Riswan Efendi, M.Sc.**  
**Sekretaris : Corry Corazon Marzuki, M.Si.**  
**Anggota I : Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**  
**Anggota II : Rahmawati, M.Sc.**

## LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

### Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



## LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 5 Februari 2021

Yang membuat pernyataan,

**AMINAH UTAMI**  
**11654201549**

UIN SUSKA RIAU

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya...”  
(QS. Al-Baqarah: 286).

*Alhamdulillahirabbil’alamiin. Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan nikmat-Nya, atas karunia serta kemudahan yang telah diberikan-Nya sehingga diriku dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan para sahabatnya, semoga kita mendapat syafa’atnya di akhirat kelak.*

*Dengan ini kupersembahkan sebuah karya untukmu, Papa (Ahmiyul Rauf) dan Mama (Khaidar Syafni) tercinta. Teruntuk Mama, yang tiada henti memberi nasehat dan mengingatkan diriku untuk selalu berdo’a. Teruntuk Papa, yang tiada henti menyemangati diriku untuk selalu menuntut ilmu dan percaya akan kemampuanku. Terima kasih telah menjagaku dalam doa-doamu.*

*Teruntuk 6 saudaraku tersayang, kak Rin, kak Qoni, bang Salman, Aisyah, Sarah & Nuri yang memenuhi rumah dengan canda tawa, tangisan sendu dan gembira, dan segala petenggaran yang menjadi kenangan nantinya. Terima kasih atas dukungan dan do’a selama ini. Teruslah bersemangat untuk menuntut ilmu dan menjadi insan yang sukses dunia dan akhirat.*

*Kepada Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si, selaku dosen pembimbing saya. Terima kasih atas kesabaran dan kesediaan ibu untuk membimbing dan mendidik saya dari awal hingga penyelesaian skripsi ini.*

*Teruntuk sahabatku yakni Baroqah (Arnis, Icin, Lilik, Yeva), Fira, dan Ela, terima kasih telah menemani, membantu dan menyemangati diriku baik selama perkuliahan dan penyelesaian skripsi ini.*

*Aminah Utami, Januari 2021*

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## NILAI TOTAL KETAKTERATURAN TITIK DARI GRAF SERI PARALEL ( $m, r, 4$ )

**AMINAH UTAMI**  
**11654201549**

Tanggal Sidang : 5 Februari 2021  
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

### ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$  untuk  $m \geq 5$  dan  $r \geq 1$ . Pelabelan total dikatakan tak teratur titik, jika bobot untuk setiap titik berbeda. Penentuan nilai total ketakteraturan titik graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$  dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah diperoleh dengan menganalisis struktur graf seri paralel sehingga diperoleh label terbesar minimum  $k$  dan batas atas dianalisis dengan pemberian label pada titik dan sisi dari graf, dengan label terbesar adalah  $k$  serta tidak ada bobot titik yang sama. Hasil yang diperoleh untuk nilai total ketakteraturan titik dari graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$  adalah  $tvs(sp(m, r, 4)) = \left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$ .

Kata Kunci : Graf seri paralel, nilai total ketakteraturan titik, pelabelan total tak teratur titik.

UIN SUSKA RIAU



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

# ***TOTAL VERTEX IRREGULARITY STRENGTH OF GRAPH SERIES PARALLEL $(m, r, 4)$***

**AMINAH UTAMI  
11654201549**

*Date of Final Exam : 5<sup>th</sup> of February, 2021*  
*Date of Graduation :*

*Department of Mathematics  
Faculty of Science and Technology  
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau  
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru*

## ***ABSTRACT***

*This study aims to determine the total vertex irregularity strength on a series parallel graph  $(m, r, 4)$  for  $m \geq 5$  and  $r \geq 1$ . Total labeling is said to be vertex irregular, if the weights for each vertices are different. Determination of the total vertex irregularity of series parallel graph  $(m, r, 4)$  is done by obtaining the largest lower limit and the smallest upper limit. The lower limit is obtained by analyzing the structure of the graph to obtain the largest minimum label of  $k$  and the upper limit is analyzed by labeling the vertices and edges of the graph, where the largest label is  $k$  and the values for each weight is different. The result obtained for the total vertex irregularity strength of a series parallel graph  $(m, r, 4)$  is  $tvs(sp(m, r, 4)) = \left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$ .*

*Keywords: Series parallel graph, total vertex irregularity strength, total vertex irregular labeling.*

UIN SUSKA RIAU



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **“Nilai Total Ketakteraturan Titik Dari Graf Seri Paralel  $(m, r, 4)$ ”**, sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Shalawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW beserta keluarga dan para sahabatnya, semoga kita mendapat syafa'atnya di akhirat kelak.

Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis menyadari akan adanya hambatan serta keterbatasan pengetahuan yang dimiliki, namun memperoleh banyak bimbingan, arahan, masukan dan dukungan dari berbagai pihak, yang telah membantu penulis dalam kelancaran penulisan. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Suyitno M.Ag., selaku Plt. Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.
5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc dan Ibu Rahmawati, M.Sc, selaku Penguji I dan Penguji II yang telah banyak memberikan masukan, saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

6. Bapak Aprijon, S.Si, M.Ed, selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa membimbing, memberi arahan serta nasehat kepada penulis dari awal perkuliahan.
  7. Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika, yang telah banyak menyalurkan ilmu pengetahuan kepada penulis.
  8. Sahabat-sahabat penulis, Arnis Cahya Sukma, Lilik Purwati S, Mahru Yeve, Syafira Auliani, Shintya Putri Alvianov dan Wela Wahyuni Utami yang telah menemani, membantu dan memberi semangat penulis selama perkuliahan.
  9. Tim bimbingan Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si, yang selalu memberi semangat dan membantu penulis dalam menyelesaikan berbagai hal permasalahan pada Tugas Akhir ini.
  10. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2016, khususnya untuk Matematika Kelas C, yang telah banyak memberikan bantuan serta dukungan kepada penulis selama perkuliahan.
  11. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
- Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin. Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh.*

Pekanbaru, 5 Februari 2021

Aminah Utami



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR ISI

|   | Halaman |
|---|---------|
| <b>LEMBAR PERSETUJUAN .....</b>                   | ii      |
| <b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>                    | iii     |
| <b>LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL .....</b> | iv      |
| <b>LEMBAR PERNYATAAN .....</b>                    | v       |
| <b>LEMBAR PERSEMBAHAN .....</b>                   | vi      |
| <b>ABSTRAK .....</b>                              | vii     |
| <b>ABSTRACT .....</b>                             | viii    |
| <b>KATA PENGANTAR .....</b>                       | ix      |
| <b>DAFTAR ISI .....</b>                           | xi      |
| <b>DAFTAR GAMBAR .....</b>                        | xiii    |
| <b>BAB I PENDAHULUAN</b>                          |         |
| 1.1 Latar Belakang .....                          | 1       |
| 1.2 Rumusan Masalah .....                         | 3       |
| 1.3 Batasan Masalah .....                         | 3       |
| 1.4 Tujuan Penelitian .....                       | 3       |
| 1.5 Manfaat Penelitian .....                      | 3       |
| 1.6 Sistematika Penulisan .....                   | 3       |
| <b>BAB II LANDASAN TEORI</b>                      |         |
| 2.1 Pengertian Graf .....                         | 5       |
| 2.2 Pengertian Graf Sederhana .....               | 5       |
| 2.3 Pengertian Graf Tak Sederhana .....           | 6       |
| 2.4 Pengertian Graf Ganda dan Graf Semu .....     | 6       |
| 2.5 Pengertian Graf Berarah dan Tak Berarah ..... | 6       |
| 2.6 Pengertian Bertetangga .....                  | 7       |
| 2.7 Pengertian Bersisian .....                    | 7       |
| 2.8 Pengertian Derajat .....                      | 7       |

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.9  | Pengertian Lintasan .....                  | 8  |
| 2.10 | Pengertian Graf Terhubung .....            | 8  |
| 2.11 | Pengertian Graf Berbobot .....             | 8  |
| 2.12 | Pengertian Graf Theta yang Diperumum ..... | 9  |
| 2.13 | Pengertian Graf Seri Paralel .....         | 9  |
| 2.14 | Pengertian Pelabelan Graf .....            | 10 |
| 2.15 | Pengertian Pelabelan Tak Teratur .....     | 11 |
| 2.16 | Pengertian Pelabelan- $k$ Total .....      | 12 |

**BAB III METODE PENELITIAN**

**BAB IV PEMBAHASAN**

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(m, r, 4)$ .   | 24 |
| 4.2 | Nilai Total Ketakturaturan Titik pada Graf $sp(m, r, 4)$ .... | 67 |

**BAB V PENUTUP**

|     |                  |     |
|-----|------------------|-----|
| 5.1 | Kesimpulan ..... | 172 |
| 5.2 | Saran .....      | 172 |

**DAFTAR PUSTAKA**

**DAFTAR RIWAYAT HIDUP**



- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## DAFTAR GAMBAR

| Gambar   | Halaman |
|--|---------|
| 2.1 Sebuah Graf .....  | 5       |
| 2.2 Graf Sederhana .....   | 6       |
| 2.3 Graf Ganda dan Graf Semu .....                                     | 6       |
| 2.4 Graf Tak Berarah dan Graf Berarah .....                            | 7       |
| 2.5 Graf dengan Derajat Berbeda .....                                  | 8       |
| 2.6 Graf Berbobot .....  | 9       |
| 2.7 Graf Theta $\theta(4,5)$ .....                                     | 9       |
| 2.8 <i>Level</i> pada $sp(m, r, l)$ .....                              | 10      |
| 2.9 Graf Seri Paralel $sp(5,4,2)$ .....                                | 10      |
| 2.10 Pelabelan Total pada $G_4$ .....                                  | 11      |
| 2.11 Pelabelan-21 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(5,3,4)$ .....  | 12      |
| 4.1 Ilustrasi Graf $sp(m, r, 4)$ .....                                 | 24      |
| 4.2 Pelabelan-21 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(5,3,4)$ .....   | 27      |
| 4.3 Pelabelan-28 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(5,4,4)$ .....   | 30      |
| 4.4 Pelabelan-34 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(5,5,4)$ .....   | 34      |
| 4.5 Pelabelan-25 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(6,3,4)$ .....   | 39      |
| 4.6 Pelabelan-33 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(6,4,4)$ .....   | 42      |
| 4.7 Pelabelan-41 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(6,5,4)$ .....   | 47      |
| 4.8 Pelabelan-29 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(7,3,4)$ .....   | 52      |
| 4.9 Pelabelan-38 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(7,4,4)$ .....   | 56      |
| 4.10 Pelabelan-48 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(7,5,4)$ .....  | 61      |
| 4.11 Pelabelan-21 Total Tak Teratur Titik pada Graf $sp(15,1,4)$ ..... | 168     |

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Banyak situasi dalam dunia nyata dapat dijelaskan dengan menggunakan diagram, yang terdiri dari suatu himpunan titik dan himpunan garis yang menghubungkan pasangan titik tertentu. Sebagai contoh, titik dapat mewakili orang dan garis mewakili pasangan teman atau titik dapat mewakili pusat komunikasi, dengan garis sebagai jaringan komunikasi. Perhatikan bahwa diagram tersebut memperhatikan pasangan titik yang digabungkan oleh suatu garis atau tidak. Abstraksi matematis dari situasi seperti ini memunculkan konsep graf [4].

Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*), dan  $E$  adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut [10]. Dalam teori graf, terdapat suatu topik yaitu pelabelan graf.

Objek kajian pelabelan graf berupa graf yang secara umum direpresentasikan dengan titik dan sisi, dan himpunan bagian bilangan yang disebut label. Pelabelan graf adalah suatu fungsi dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi atau keduanya dengan rangenya bilangan riil [9]. Graf berlabel berfungsi sebagai model yang berguna untuk berbagai aplikasi seperti teori pengkodean, kristalografi *x-ray*, radar, astronomi, desain sirkuit, pengalamatan jaringan komunikasi, manajemen basis data, skema berbagi rahasia, dan model untuk pemrograman kendala melalui domain terbatas [5].

Konsep pelabelan tak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh [2], dimana pelabelan- $k$  tak teratur pada graf  $G$  didefinisikan sebagai pemetaan himpunan sisi  $e$  dari  $G$  ke himpunan bilangan  $\{1, 2, \dots, k\}$  sedemikian sehingga setiap titik  $v$  mempunyai bobot yang berbeda. Bobot suatu titik  $v$ , dinotasikan dengan  $w(v)$ , merupakan jumlah label  $v$  dan semua sisi yang terkait



dengan  $v$ . Sedangkan bobot suatu sisi  $e$ , dinotasikan dengan  $w(e)$ , merupakan jumlah label sisi  $e$  dan label semua titik yang terkait dengan  $e$ .

Pelabelan- $k$  total tak teratur diperkenalkan pada penelitian [8], dimana pelabelan- $k$  total tak teratur sisi didefinisikan sebuah pelabelan- $k$  total dari graf  $G$  jika untuk dua sisi  $e$  dan  $f$  yang berbeda, berlaku  $w(e) \neq w(f)$  dan pelabelan- $k$  total tak teratur titik didefinisikan sebuah pelabelan- $k$  total dari graf  $G$  jika untuk setiap titik  $x$  dan  $y$  yang berbeda, berlaku  $w(x) \neq w(y)$ . Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf  $G$  ( $tvs(G)$ ) atau nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf  $G$  ( $te(G)$ ), adalah nilai  $k$  terkecil sehingga suatu graf  $G$  memiliki pelabelan- $k$  total tak teratur titik atau sisi.

Penelitian terkait nilai total ketakteraturan graf terus berkembang. Diantaranya adalah penelitian oleh [11], terkait nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang, dimana graf bintang adalah suatu graf bipartit lengkap  $K_{1,n}$  dengan  $n$  jumlah titik, dan disimpulkan bahwa  $ts(2S_n) = n + 1$ . Selanjutnya penelitian [3] yang telah menentukan nilai total ketakteraturan sisi pada graf seri paralel  $sp(m, r, l)$ , dengan  $m$  *longitude* pada setiap graf theta,  $r$  titik pada setiap *longitude* dan  $l$  graf theta seragam dan memperoleh  $tes(sp(m, r, l)) = \left\lceil \frac{lm(r+1)+2}{3} \right\rceil$  untuk  $r \geq 1$  dan penelitian [1] yang memperoleh nilai ketakteraturan total dari graf hasil kali *comb*  $P_m$  dan  $C_4$  dimana  $P_m$  adalah graf lintasan dengan  $m$  jumlah titik dan  $C_4$  adalah graf lingkaran dengan empat titik. Penelitian memperoleh hasil  $ts(P_m C_4) = \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil$ .

Berdasarkan penelitian [13], nilai total ketakteraturan sisi dari graf layang-layang  $(n, t)$  adalah  $tes(n, t) = \left\lceil \frac{n+t+2}{3} \right\rceil$ , untuk  $n \geq 3$  dan  $t \geq 1$ . Penelitian [7] dan [12] telah menentukan nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel, berdasarkan graf yang telah digunakan pada penelitian [3]. Pada graf  $sp(m, 1, 3)$ , penelitian oleh [7] telah menemukan hasil  $tvs(sp(m, 1, 3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$  untuk  $m \geq 4$  [7]. Pada graf  $sp(m, r, 2)$ , penelitian oleh [12] telah menyimpulkan bahwa  $tvs(sp(m, r, 2)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil$  untuk  $m \geq 3$  dan  $r \geq 3$ . Berdasarkan penelitian

sebelumnya, penulis tertarik untuk membahas lanjut nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel dengan judul “**Nilai Total Ketakteraturan Titik Dari Graf Seri Paralel  $(m, r, 4)$** ”.

### 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah “Bagaimana rumus umum nilai total ketakteraturan titik dari graf seri paralel  $(m, r, 4)$ ?”

### 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah menentukan rumus umum nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel  $(m, r, 4)$  untuk  $m \geq 5$  dan  $r \geq 1$ .

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh rumus umum nilai total ketakteraturan titik dari graf seri paralel  $(m, r, 4)$ .

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan bidang teori graf.
2. Mengembangkan penelitian terkait nilai total ketakteraturan titik pada graf seri paralel.

### 1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

## BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

## BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori dasar yang digunakan dalam proses penelitian.



### **BAB III METODE PENELITIAN**

Bab ini berisi tentang langkah-langkah yang diterapkan untuk mendapatkan hasil yang diharapkan.

### **BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembahasan dan penjabaran dalam menyelesaikan penelitian sehingga mendapatkan hasil yang diharapkan.

### **BAB V PENUTUP**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari apa yang telah dibahas dalam bab sebelumnya.

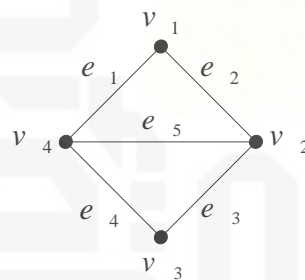
- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
  2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

## BAB II

### LANDASAN TEORI

Pada bab II, dijelaskan mengenai teori-teori yang digunakan dalam penelitian. Teori-teori tersebut berkaitan dengan graf, pelabelan graf, dan nilai ketakteraturan graf.

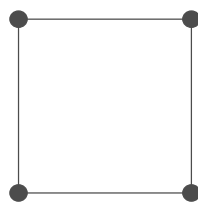
**Definisi 2.1 Pengertian Graf** [10] Graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , ditulis dengan notasi  $G = (V, E)$ , yang dalam hal ini  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan  $E$  adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik. Titik pada graf dapat dilabeli dengan huruf, bilangan asli atau gabungan keduanya. Sisi pada graf menghubungkan titik  $u$  dengan titik  $v$ , dinotasikan dengan  $e = (u, v)$ .



**Gambar 2.1 Sebuah Graf**

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berikut akan didefinisikan jenis-jenis graf.

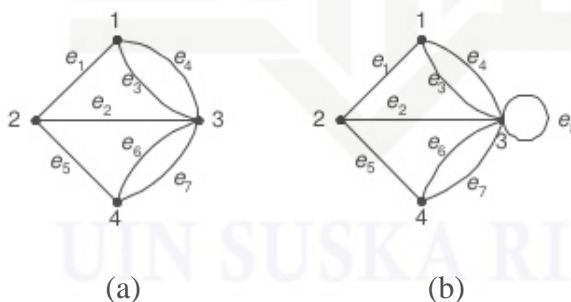
**Definisi 2.2 Pengertian Graf Sederhana** [6] Sebuah graf dimana setiap sisi berhubungan dengan dua buah titik berbeda dan tidak ada dua sisi yang berhubungan dengan pasangan titik tersebut disebut graf sederhana. Graf sederhana tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Pada graf sederhana, sisi adalah pasangan tak terurut (*unordered pairs*). Jadi, menuliskan sisi  $(u, v)$  sama saja dengan  $(v, u)$ .



Gambar 2.2 Graf Sederhana

**Definisi 2.3 Pengertian Graf Tak Sederhana** [10] Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak sederhana (*unsimple graph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda, dimana untuk menghubungkan sepasang titik bisa lebih dari dua buah. Ada dua macam graf tidak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*).

**Definisi 2.4 Pengertian Graf Ganda dan Graf Semu** [6] Sebuah graf yang memungkinkan mempunyai sisi ganda yang berhubungan titik yang sama disebut *multigraph*. Ketika terdapat  $m$  buah sisi berbeda yang berhubungan dengan sepasang titik yang tidak berurut  $u$  dan  $v$ , sisi  $(u, v)$  adalah sebuah sisi berganda  $m$ . Sedangkan sebuah graf yang mengandung gelang dan memungkinkan terdapat sisi ganda yang berhubungan dengan sepasang titik disebut *pseudograph*.



Gambar 2.3 (a) Graf Ganda dan (b) Graf Semu

**Definisi 2.5 Pengertian Graf Berarah dan Tak Berarah** [10] Sisi pada graf dapat mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

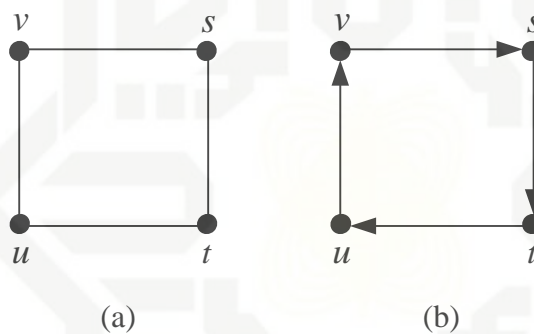
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

1. Graf tak berarah (*undirected graph*)

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi,  $(u, v) = (v, u)$  adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah (*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Sisi berarah lebih diketahui sebagai busur (*arc*). Pada graf berarah,  $(u, v) \neq (v, u)$ . Untuk busur  $(u, v)$  titik  $u$  dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik  $v$  dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).



Gambar 2.4 (a) Graf Tak Berarah dan (b) Graf Berarah

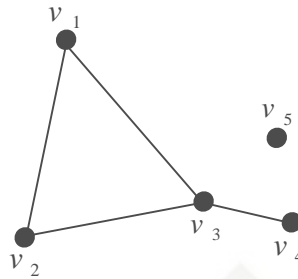
Berikut ini akan didefinisikan beberapa terminologi (istilah) yang digunakan dalam teori graf.

**Definisi 2.6 Pengertian Bertetangga** [10] Dua buah titik pada graf  $G$  dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain,  $u$  bertetangga dengan  $v$  jika  $(u, v)$  adalah sebuah sisi pada graf  $G$ .

**Definisi 2.7 Pengertian Bersisian** [10] Untuk sembarang sisi  $e = (u, v)$ , sisi  $e$  dinyatakan bersisian dengan titik  $u$  dan titik  $v$ .

**Definisi 2.8 Pengertian Derajat** [10] Derajat suatu titik pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Notasi  $d(v)$  menyatakan derajat titik  $v$ .

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



**Gambar 2.5 Graf dengan Derajat Berbeda**

Pada Gambar 2.5, derajat untuk setiap titik adalah sebagai berikut:

Titik 1:  $d(v_1) = 2$

Titik 2:  $d(v_2) = 2$

Titik 3:  $d(v_3) = 3$

Titik 4:  $d(v_4) = 1$

Titik 5:  $d(v_5) = 0$

**Definisi 2.9 Pengertian Lintasan** [10] Lintasan yang panjangnya  $n$  dari titik awal  $v_0$  ke titik tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  ialah barisan berselang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf  $G$ . Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) jika semua titiknya berbeda (setiap sisi yang dilalui hanya satu kali). Lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak disebut lintasan terbuka (*open path*).

**Definisi 2.10 Pengertian Graf Terhubung** [10] Graf  $G$  disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk sepasang titik  $u$  dan  $v$  didalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $u$  ke  $v$  (yang juga harus berarti ada lintasan dari  $v$  ke  $u$ ). Jika tidak, maka  $G$  disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

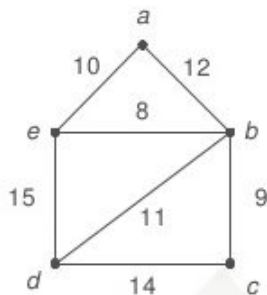
**Definisi 2.11 Pengertian Graf Berbobot** [10] Graf berbobot adalah graf yang setiap sisi dan titiknya diberi sebuah harga (bobot). Bobot pada tiap sisi dan titik dapat berbeda-beda bergantung pada masalah yang dimodelkan oleh graf. Istilah lain yang sering dikaitkan dengan graf berbobot adalah graf berlabel.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

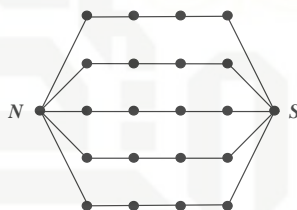
- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.



Gambar 2.6 Graf Berbobot

**Definisi 2.12 Pengertian Graf Theta yang Diperumum** [3] Graf theta yang diperumum  $\theta(n, m)$  atau graf theta dengan  $n$  titik, mempunyai dua titik  $N$  dan  $S$  berderajat  $m$ , sehingga setiap titik lainnya berderajat 2 dan merentang pada salah satu dari  $m$  lintasan, yang menghubungkan titik  $N$  dan  $S$ . Kedua titik  $N$  dan  $S$  masing-masing disebut kutub utara dan kutub selatan. Lintasan antara kutub selatan dan kutub utara disebut *longitude*. Sebuah *longitude* dilambangkan dengan  $L$ .

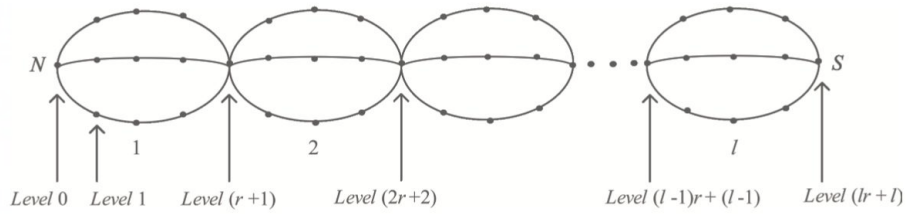


Gambar 2.7 Graf Theta  $\theta(4, 5)$

Graf theta  $\theta(n, l)$  dikatakan seragam jika  $|L_1| = |L_2| = \dots = |L_l|$ , dengan  $L_i$  adalah *longitude* dari  $\theta(n, l)$ . Pada tugas akhir ini, akan digunakan komposisi seri dari graf theta seragam yang akan didefinisikan sebagai berikut.

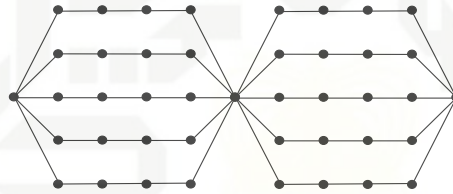
**Definisi 2.13 Pengertian Graf Seri Paralel** [3] Graf seri paralel adalah gabungan graf theta  $G = G_1 \circ G_2 \circ G_3 \dots G_l$ , dimana  $G_i = \theta(rm + 2, m, r)$ , dengan  $m$  adalah *longitude* pada setiap graf theta,  $r$  adalah jumlah titik berderajat dua yang merentang pada setiap *longitude* dan  $i = 1, 2, \dots, l$ , yaitu banyaknya graf theta. *Level* pada graf dinotasikan dengan *Level* 0, *Level* 1, ..., *Level*  $(r + 1)$ , *Level*  $(r + 2)$ , ..., *Level*  $(lr + l - 1)$  dan *Level*  $(lr + l)$ .





Gambar 2.8 Level pada  $sp(m, r, l)$

Graf seri paralel dilambangkan dengan  $sp(m, r, l)$ , dengan  $m$  adalah *longitude* pada setiap graf theta,  $r$  adalah banyaknya titik berderajat dua yang merentang pada setiap *longitude* dan  $l$  adalah banyaknya graf theta seragam.



Gambar 2.9 Graf Seri Paralel  $sp(5, 4, 2)$

Pada Gambar 2.9, diberikan contoh graf seri paralel  $sp(5, 4, 2)$ , dimana terdapat 5 *longitude* pada setiap graf theta, 4 titik pada setiap *longitude* dan 2 buah graf theta.

Pada tahun 2015, I. Rajasingh, dkk., melakukan penelitian terkait nilai total ketakteraturan sisi graf  $sp(m, r, l)$  dan memperoleh teorema berikut:

**Teorema 2.1 Nilai Total Ketakteraturan Sisi Graf  $sp(m, r, l)$**  [3] Misalkan  $sp(m, r, l)$ ,  $l \geq 2$  adalah graf seri paralel. Maka

$$tes(sp(m, r, l)) = \left\lceil \frac{lm(r+1) + 2}{3} \right\rceil, r \geq 1$$

**Definisi 2.14 Pengertian Pelabelan Graf** [14] Pelabelan pada suatu graf adalah suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf ke suatu himpunan bilangan (biasanya himpunan bilangan bulat positif). Pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labellings*), pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex-*

*labellings*), dan pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge-labellings*).

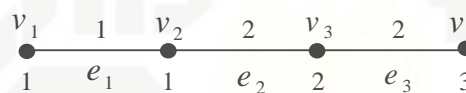
Bobot (*weight*) dari elemen graf, dinotasikan dengan  $w$ , adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik  $v$ , dinotasikan dengan  $w(v)$ , dengan pelabelan  $\lambda$  adalah

$$w(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$$

dan bobot sisi  $uv$ , dinotasikan dengan  $w(uv)$ , adalah

$$w(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v).$$

Berikut diberikan contoh pelabelan total pada graf.



**Gambar 2.10 Pelabelan Total pada  $G_4$**

Misalkan  $\lambda$  adalah pelabelan total pada  $G_4$  seperti pada Gambar 2.10, yaitu:

$$\lambda(v_4) = 3$$

$$\lambda(v_1) = \lambda(v_2) = \lambda(e_1) = 1$$

$$\lambda(v_3) = \lambda(e_2) = \lambda(e_3) = 2$$

Maka bobot titik  $v_1, v_2, v_3$  dan  $v_4$  masing-masing adalah

$$w(v_1) = \lambda(v_1) + \lambda(e_1) = 1 + 1 = 2$$

$$w(v_2) = \lambda(v_2) + \lambda(e_1) + \lambda(e_2) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$w(v_3) = \lambda(v_3) + \lambda(e_2) + \lambda(e_3) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$w(v_4) = \lambda(v_4) + \lambda(e_3) = 3 + 2 = 5$$

**Definisi 2.15 Pengertian Pelabelan Tak Teratur** [2] Pelabelan tak teratur pada graf  $G$  didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan sisi dari  $G$  ke himpunan bilangan  $\{1, 2, \dots, k\}$  sedemikian sehingga semua titik mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik  $v$  pada pelabelan ini adalah jumlah semua label sisi yang terkait pada  $v$ . Nilai ketakteraturan (*irregular labeling*) dari  $G$  adalah

bilangan bulat positif terkecil  $k$  sedemikian sehingga  $G$  mempunyai suatu pelabelan  $k$  tak teratur.

**Definisi 2.16 Pengertian Pelabelan- $k$  Total** [8] Untuk sebuah graf  $G = (V, E)$  dengan himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$ , didefinisikan sebuah pelabelan  $\partial: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  adalah pelabelan- $k$  total.

1. Pelabelan- $k$  total tak teratur sisi didefinisikan sebuah pelabelan- $k$  total dari graf  $G$  jika untuk dua sisi  $e$  dan  $f$  yang berbeda, berlaku

$$w(e) \neq w(f)$$

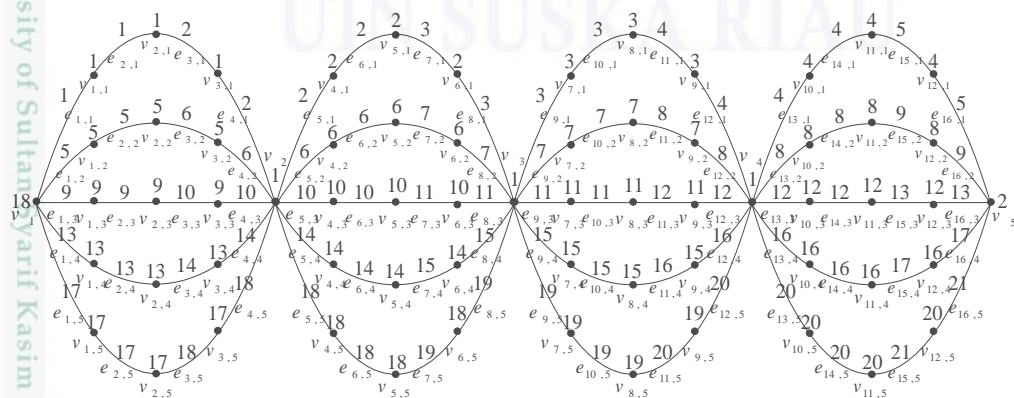
Nilai total ketakaturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf  $G$ , yang dinotasikan dengan  $tes(G)$  adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf  $G$  dengan pelabelan total tak teratur sisi.

2. Pelabelan- $k$  ketakaturan total titik didefinisikan sebuah pelabelan- $k$  dari graf  $G$  jika untuk setiap titik  $x$  dan  $y$  yang berbeda, berlaku

$$w(x) \neq w(y)$$

Nilai total ketakaturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari graf  $G$ , yang dinotasikan dengan  $tv_s(G)$  adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf  $G$  dengan pelabelan total tak teratur titik.

Berikut disajikan contoh pelabelan total tak teratur titik pada graf  $sp(5, 3, 4)$ , dimana terdapat 5 *longitude* pada setiap graf theta, 3 titik pada setiap *longitude*, pada 4 graf theta seragam.



**Gambar 2.11 Pelabelan-21 Total Tak Teratur Titik pada Graf  $sp(5, 3, 4)$**

$$w(v_{1,1}) = \lambda(e_{1,1}) + \lambda(v_{1,1}) + \lambda(e_{1,2}) = 1 + 1 + 1 = 3$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$w(v_{1,2}) = \lambda(e_{1,2}) + \lambda(v_{1,2}) + \lambda(e_{2,2}) = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$w(v_{1,3}) = \lambda(e_{1,3}) + \lambda(v_{1,3}) + \lambda(e_{2,3}) = 9 + 9 + 9 = 27$$

$$w(v_{1,4}) = \lambda(e_{1,4}) + \lambda(v_{1,4}) + \lambda(e_{2,4}) = 13 + 13 + 13 = 39$$

$$w(v_{1,5}) = \lambda(e_{1,5}) + \lambda(v_{1,5}) + \lambda(e_{2,5}) = 17 + 17 + 17 = 51$$

$$w(v_{2,1}) = \lambda(e_{2,1}) + \lambda(v_{2,1}) + \lambda(e_{3,1}) = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$w(v_{2,2}) = \lambda(e_{2,2}) + \lambda(v_{2,2}) + \lambda(e_{3,2}) = 5 + 5 + 6 = 16$$

$$w(v_{2,3}) = \lambda(e_{2,3}) + \lambda(v_{2,3}) + \lambda(e_{3,3}) = 9 + 9 + 10 = 28$$

$$w(v_{2,4}) = \lambda(e_{2,4}) + \lambda(v_{2,4}) + \lambda(e_{3,4}) = 13 + 13 + 14 = 40$$

$$w(v_{2,5}) = \lambda(e_{2,5}) + \lambda(v_{2,5}) + \lambda(e_{3,5}) = 17 + 17 + 18 = 52$$

$$w(v_{3,1}) = \lambda(e_{3,1}) + \lambda(v_{3,1}) + \lambda(e_{4,1}) = 2 + 1 + 2 = 4$$

$$w(v_{3,2}) = \lambda(e_{3,2}) + \lambda(v_{3,2}) + \lambda(e_{4,2}) = 6 + 5 + 6 = 17$$

$$w(v_{3,3}) = \lambda(e_{3,3}) + \lambda(v_{3,3}) + \lambda(e_{4,3}) = 10 + 9 + 10 = 28$$

$$w(v_{3,4}) = \lambda(e_{3,4}) + \lambda(v_{3,4}) + \lambda(e_{4,4}) = 14 + 13 + 14 = 41$$

$$w(v_{3,5}) = \lambda(e_{3,5}) + \lambda(v_{3,5}) + \lambda(e_{4,5}) = 18 + 17 + 18 = 53$$

$$w(v_{4,1}) = \lambda(e_{5,1}) + \lambda(v_{4,1}) + \lambda(e_{6,1}) = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$w(v_{4,2}) = \lambda(e_{5,2}) + \lambda(v_{4,2}) + \lambda(e_{6,2}) = 6 + 6 + 6 = 18$$

$$w(v_{4,3}) = \lambda(e_{5,3}) + \lambda(v_{4,3}) + \lambda(e_{6,3}) = 10 + 10 + 10 = 30$$

$$w(v_{4,4}) = \lambda(e_{5,4}) + \lambda(v_{4,4}) + \lambda(e_{6,4}) = 14 + 14 + 14 = 42$$

$$w(v_{4,5}) = \lambda(e_{5,5}) + \lambda(v_{4,5}) + \lambda(e_{6,5}) = 18 + 18 + 18 = 54$$

$$w(v_{5,1}) = \lambda(e_{6,1}) + \lambda(v_{5,1}) + \lambda(e_{7,1}) = 2 + 2 + 3 = 7$$

$$w(v_{5,2}) = \lambda(e_{6,2}) + \lambda(v_{5,2}) + \lambda(e_{7,2}) = 6 + 6 + 7 = 19$$

$$w(v_{5,3}) = \lambda(e_{6,3}) + \lambda(v_{5,3}) + \lambda(e_{7,3}) = 10 + 10 + 11 = 31$$

$$w(v_{5,4}) = \lambda(e_{6,4}) + \lambda(v_{5,4}) + \lambda(e_{7,4}) = 14 + 14 + 15 = 43$$

$$w(v_{5,5}) = \lambda(e_{6,5}) + \lambda(v_{5,5}) + \lambda(e_{7,5}) = 18 + 18 + 19 = 55$$

$$w(v_{6,1}) = \lambda(e_{7,1}) + \lambda(v_{6,1}) + \lambda(e_{8,1}) = 3 + 2 + 3 = 8$$

$$w(v_{6,2}) = \lambda(e_{7,2}) + \lambda(v_{6,2}) + \lambda(e_{8,2}) = 7 + 6 + 7 = 20$$

$$w(v_{6,3}) = \lambda(e_{7,3}) + \lambda(v_{6,3}) + \lambda(e_{8,3}) = 11 + 10 + 11 = 32$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$w(v_{6,4}) = \lambda(e_{7,4}) + \lambda(v_{6,4}) + \lambda(e_{8,4}) = 15 + 14 + 15 = 44$$

$$w(v_{6,5}) = \lambda(e_{7,5}) + \lambda(v_{6,5}) + \lambda(e_{8,5}) = 19 + 18 + 19 = 56$$

$$w(v_{7,1}) = \lambda(e_{9,1}) + \lambda(v_{7,1}) + \lambda(e_{10,1}) = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$w(v_{7,2}) = \lambda(e_{9,2}) + \lambda(v_{7,2}) + \lambda(e_{10,2}) = 7 + 7 + 7 = 21$$

$$w(v_{7,3}) = \lambda(e_{9,3}) + \lambda(v_{7,3}) + \lambda(e_{10,3}) = 11 + 11 + 11 = 33$$

$$w(v_{7,4}) = \lambda(e_{9,4}) + \lambda(v_{7,4}) + \lambda(e_{10,4}) = 15 + 15 + 15 = 45$$

$$w(v_{7,5}) = \lambda(e_{9,5}) + \lambda(v_{7,5}) + \lambda(e_{10,5}) = 19 + 19 + 19 = 57$$

$$w(v_{8,1}) = \lambda(e_{10,1}) + \lambda(v_{8,1}) + \lambda(e_{11,1}) = 3 + 3 + 4 = 10$$

$$w(v_{8,2}) = \lambda(e_{10,2}) + \lambda(v_{8,2}) + \lambda(e_{11,2}) = 7 + 7 + 8 = 22$$

$$w(v_{8,3}) = \lambda(e_{10,3}) + \lambda(v_{8,3}) + \lambda(e_{11,3}) = 11 + 11 + 12 = 34$$

$$w(v_{8,4}) = \lambda(e_{10,4}) + \lambda(v_{8,4}) + \lambda(e_{11,4}) = 15 + 15 + 16 = 46$$

$$w(v_{8,5}) = \lambda(e_{10,5}) + \lambda(v_{8,5}) + \lambda(e_{11,5}) = 19 + 19 + 20 = 58$$

$$w(v_{9,1}) = \lambda(e_{11,1}) + \lambda(v_{9,1}) + \lambda(e_{12,1}) = 4 + 3 + 4 = 11$$

$$w(v_{9,2}) = \lambda(e_{11,2}) + \lambda(v_{9,2}) + \lambda(e_{12,2}) = 8 + 7 + 8 = 23$$

$$w(v_{9,3}) = \lambda(e_{11,3}) + \lambda(v_{9,3}) + \lambda(e_{12,3}) = 12 + 11 + 12 = 35$$

$$w(v_{9,4}) = \lambda(e_{11,4}) + \lambda(v_{9,4}) + \lambda(e_{12,4}) = 16 + 15 + 16 = 47$$

$$w(v_{9,5}) = \lambda(e_{11,5}) + \lambda(v_{9,5}) + \lambda(e_{12,5}) = 20 + 19 + 20 = 59$$

$$w(v_{10,1}) = \lambda(e_{13,1}) + \lambda(v_{10,1}) + \lambda(e_{14,1}) = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$w(v_{10,2}) = \lambda(e_{13,2}) + \lambda(v_{10,2}) + \lambda(e_{14,2}) = 8 + 8 + 8 = 24$$

$$w(v_{10,3}) = \lambda(e_{13,3}) + \lambda(v_{10,3}) + \lambda(e_{14,3}) = 12 + 12 + 12 = 36$$

$$w(v_{10,4}) = \lambda(e_{13,4}) + \lambda(v_{10,4}) + \lambda(e_{14,4}) = 16 + 16 + 16 = 48$$

$$w(v_{10,5}) = \lambda(e_{13,5}) + \lambda(v_{10,5}) + \lambda(e_{14,5}) = 20 + 20 + 20 = 60$$

$$w(v_{11,1}) = \lambda(e_{14,1}) + \lambda(v_{11,1}) + \lambda(e_{15,1}) = 4 + 4 + 5 = 13$$

$$w(v_{11,2}) = \lambda(e_{14,2}) + \lambda(v_{11,2}) + \lambda(e_{15,2}) = 8 + 8 + 9 = 25$$

$$w(v_{11,3}) = \lambda(e_{14,3}) + \lambda(v_{11,3}) + \lambda(e_{15,3}) = 12 + 12 + 13 = 37$$

$$w(v_{11,4}) = \lambda(e_{14,4}) + \lambda(v_{11,4}) + \lambda(e_{15,4}) = 16 + 16 + 17 = 49$$

$$w(v_{11,5}) = \lambda(e_{14,5}) + \lambda(v_{11,5}) + \lambda(e_{15,5}) = 20 + 20 + 21 = 61$$

$$w(v_{12,1}) = \lambda(e_{15,1}) + \lambda(v_{12,1}) + \lambda(e_{16,1}) = 5 + 4 + 5 = 14$$

$$w(v_{12,2}) = \lambda(e_{15,2}) + \lambda(v_{12,2}) + \lambda(e_{16,2}) = 9 + 8 + 9 = 26$$

$$w(v_{12,3}) = \lambda(e_{15,3}) + \lambda(v_{12,3}) + \lambda(e_{16,3}) = 13 + 12 + 13 = 38$$

$$w(v_{12,4}) = \lambda(e_{15,4}) + \lambda(v_{12,4}) + \lambda(e_{16,4}) = 17 + 16 + 17 = 50$$

$$w(v_{12,5}) = \lambda(e_{15,5}) + \lambda(v_{12,5}) + \lambda(e_{16,5}) = 21 + 20 + 21 = 62$$

$$w(v_1) = \lambda(v_1) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{1,m}) = 18 + 1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 63$$

$$\begin{aligned} w(v_2) &= \lambda(v_2) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{4,m}) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{5,m}) \\ &= 1 + 2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 2 + 6 + 10 + 14 + 18 \\ &= 101 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v_3) &= \lambda(v_3) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{8,m}) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{9,m}) \\ &= 1 + 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 3 + 7 + 11 + 15 + 19 \\ &= 111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v_4) &= \lambda(v_4) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{12,m}) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{13,m}) \\ &= 1 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 \\ &= 121 \end{aligned}$$

$$w(v_5) = \lambda(v_5) + \sum_{m=1}^5 \lambda(e_{16,m}) = 2 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 67$$

Perhatikan bahwa bobot setiap titik pada  $sp(5,3,4)$  berbeda, memenuhi syarat pelabelan- $k$  total tak teratur titik. Dari Gambar 2.11, terlihat bahwa label terbesar pada graf  $sp(5,3,4)$  adalah 21, maka dinamakan pelabelan-21 total tak teratur titik.

Penelitian mengenai nilai total ketakaturan total dari graf seri paralel dilanjutkan oleh Riskawati, dkk., dan L. Yulianti. Pada tahun 2019, Riskawati,



dkk., memperoleh nilai ketakaturan pada graf series paralel untuk  $m \geq 3$  dan  $r \geq 3$  sebagai berikut.

**Teorema 2.2 Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf  $sp(m, r, 2)$**  [12] Untuk  $m \geq 3$  dan  $r \geq 3$ , maka nilai total ketidakteraturan titik dari graf seri paralel  $sp(m, r, 2)$  adalah

$$tvs(sp(m, r, 2)) = \left\lceil \frac{2mr+2}{3} \right\rceil.$$

Pada tahun yang sama, L. Yuliarti memperoleh nilai ketakaturan pada graf series paralel untuk  $m \geq 4$  dan  $r = 1$  dan mengemukakan teorema berikut.

**Teorema 2.3 Nilai Total Ketidakteraturan Titik Graf  $sp(m, 1, 3)$**  [7]

Diberikan  $sp(m, 1, 3)$ ,  $m \geq 4$  adalah graf seri paralel, maka

$$tvs(sp(m, 1, 3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil.$$

**Bukti.** Akan dibuktikan  $tvs(sp(m, 1, 3)) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ . Perhatikan bahwa derajat titik terkecil dari graf  $sp(m, 1, 3)$  adalah 2 dan jumlah titik yang berderajat dua pada graf  $sp(m, 1, 3)$  adalah  $3m$ . Agar mendapat pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 diberi label yang dimulai dari  $3, 4, 5, \dots, 3m + 2$ . Sementara bobot titik graf  $sp(m, 1, 3)$  yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang saling terhubung dengan titik tersebut. Oleh karena itu, diperoleh label terbesar minimum yang digunakan yaitu  $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$  dan tidak mungkin lebih kecil dari  $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ , sehingga  $tvs(sp(m, 1, 3)) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa  $tvs(sp(m, 1, 3)) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ . Hal ini akan dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan- $\left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$  total tak teratur titik dari graf  $sp(m, 1, 3)$  untuk  $m$  bilangan asli dan  $m \geq 4$ , yaitu:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- Pelabelan titik dari graf  $sp(m, 1, 3)$  sebagai berikut:

$$\lambda(v_1) = \begin{cases} 5 & ; \text{ jika } m = 4 \\ 3 & ; \text{ jika } m = 5 \\ 1 & ; \text{ jika } m \geq 6 \end{cases}$$

$$\lambda(v_2) = 1$$

$$\lambda(v_3) = 1$$

$$\lambda(v_4) = \begin{cases} 4 & ; \text{ jika } m = 4 \\ 1 & ; \text{ jika } m \geq 6 \end{cases}$$

$$\lambda(v_{i,j}) = j \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, m \text{ dan } i = 1, 2, 3.$$

- Pelabelan sisi dari graf  $sp(m, 1, 3)$  sebagai berikut:

$$\lambda(e_{i,j}) = \begin{cases} j & ; \text{ jika } i = 1, 2, 3 \\ j + 1 & ; \text{ jika } i = 4, 5, 6 \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan diatas, diperoleh bobot titik dari graf  $sp(m, 1, 3)$  untuk  $m \geq 4$  sebagai berikut:

$$w(v_{1,j}) = \lambda(v_{1,j}) + \lambda(e_{1,j}) + \lambda(e_{2,j}) = j + j + j = 3j$$

$$w(v_{2,j}) = \lambda(v_{2,j}) + \lambda(e_{3,j}) + \lambda(e_{4,j}) = j + j + (j + 1) = 3j + 1$$

$$w(v_{3,j}) = \lambda(v_{3,j}) + \lambda(e_{5,j}) + \lambda(e_{6,j}) = j + (j + 1) + (j + 1) = 3j + 2$$

$$\begin{aligned} w(v_1) &= \lambda(v_1) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{1,j}) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^m j \\ &= 1 + \frac{m + m^2}{2} \\ &= \frac{m^2 + m + 2}{2} \\ &= \begin{cases} 15 & ; \text{ jika } m = 4 \\ 18 & ; \text{ jika } m = 5 \\ \frac{m^2 + m + 2}{2} & ; \text{ jika } m \geq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

**Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang**

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpulkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$w(v_2) = \lambda(v_2) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{2,j}) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{3,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^m j + \sum_{j=1}^m j$$

$$= 1 + 2 \sum_{j=1}^m j$$

$$= 1 + 2 \left( \frac{m + m^2}{2} \right)$$

$$= 1 + m + m^2$$

$$w(v_3) = \lambda(v_3) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{4,j}) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{5,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^m (j + 1) + \sum_{j=1}^m (j + 1)$$

$$= 1 + 2 \sum_{j=1}^m (j + 1)$$

$$= 1 + 2 \left( \frac{3m + m^2}{2} \right)$$

$$= 1 + 3m + m^2$$

$$w(v_4) = \lambda(v_4) + \sum_{j=1}^m \lambda(e_{6,j})$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^m (j + 1)$$

$$= 1 + \frac{3m + m^2}{2}$$

$$= \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$$

$$= \begin{cases} 18 & ; \text{ jika } m = 4 \\ \frac{m^2 + 3m + 2}{2} & ; \text{ jika } m \geq 6 \end{cases}$$



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Perhatikan bahwa fungsi  $\lambda$  adalah suatu pemetaan dari  $\{V(sp(m, 1, 3)) \cup E(sp(m, 1, 3))\}$  ke  $\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{3m+2}{3} \right\rfloor\}$ . Bobot titik pada graf seri paralel  $sp(m, 1, 3)$ :

- Untuk  $m = 4$ , bobot titik  $v_{i,j}$  dengan  $i = 1, 2, 3$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$  adalah 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Sedangkan bobot titik  $v_i$  dengan  $i = 1, 2, 3, 4$  adalah 15, 21, 29, 18. Jadi tidak ada bobot titik yang sama.
- Untuk  $m = 5$ , bobot titik  $v_{i,j}$  dengan  $i = 1, 2, 3$  dan  $j = 1, 2, \dots, m$  adalah 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. Sedangkan bobot titik  $v_i$  dengan  $i = 1, 2, 3, 4$  adalah 18, 31, 41, 21. Jadi tidak ada bobot titik yang sama.
- Untuk  $m \geq 6$ , bobot titik  $v_{i,j}$  yang dinotasikan dengan  $w(v_{1,j})$  adalah bilangan bulat positif mulai dari 3, 6, 9,  $\dots$ ,  $3m$ ,  $w(v_{2,j})$  adalah bilangan bulat positif mulai dari 4, 7, 10,  $\dots$ ,  $3m + 1$ , dan  $w(v_{3,j})$  adalah bilangan bulat positif mulai dari 5, 8, 11,  $\dots$ ,  $3m + 2$ . Sedangkan bobot titik  $v_i$  yang dinotasikan dengan  $w(v_1)$  adalah  $\frac{m^2+m+2}{2}$ ,  $w(v_2)$  adalah  $1 + m + m^2$ ,  $w(v_3)$  adalah  $1 + 3m + m^2$ , dan  $w(v_4)$  adalah  $\frac{m^2+3m+2}{2}$ .

Berikut akan ditunjukkan bahwa setiap bobot titik pada graf seri paralel  $s(m, 1, 3)$  berbeda. Akan ditunjukkan bahwa  $w(v_{3,j}) < w(v_1) < w(v_4) < w(v_2) < w(v_3)$ .

- Akan ditunjukkan bahwa  $3m + 2 < \frac{m^2+m+2}{2}$  untuk  $m \geq 6$  melalui induksi matematika.

Penyelesaian: Misalkan  $p(n)$  adalah proposisi bahwa  $3m + 2 < \frac{m^2+m+2}{2}$  untuk  $m \geq 6$ .

Basis induksi:  $p(6)$  benar, karena untuk  $m = 6$  diperoleh

$$3 \cdot 6 + 2 < \frac{6^2 + 6 + 2}{2}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$20 < \frac{44}{2}$$

$$20 < 22$$

Langkah induksi: Asumsikan  $m = k$  benar, yaitu mengasumsikan bahwa

$$3k + 2 < \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

adalah benar (hipotesis induksi). Akan diperlihatkan bahwa  $m = k + 1$  juga benar, yaitu

$$3(k + 1) + 2 < \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{(k^2 + 2k + 1) + k + 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{k^2 + 3k + 4}{2}.$$

Perhatikan bahwa  $3k + 2 < \frac{k^2 + k + 2}{2}$  (kedua ruas ditambah dengan 3)

$$\Leftrightarrow 3k + 2 + 3 < \frac{k^2 + k + 2}{2} + 3$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{k^2 + k + 2}{2} + \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{k^2 + k + 8}{2} < \frac{k^2 + k + 8}{2} + \frac{2k - 4}{2} \quad (\text{karena } a < b < c)$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{k^2 + k + 8}{2} + \frac{2k - 4}{2} \quad (\text{karena } a < c)$$

$$\Leftrightarrow 3k + 5 < \frac{k^2 + 3k + 4}{2}.$$

Karena basis induksi dan langkah induksi sudah benar, maka terbukti bahwa  $3m + 2 < \frac{m^2 + m + 2}{2}$  untuk  $m \geq 6$ .

b. Akan ditunjukkan  $\frac{m^2 + m + 2}{2} < \frac{m^2 + 3m + 2}{2}$ .

Perhatikan bahwa,

$$m < 3m \quad (\text{kedua ruas ditambah } m^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m + 2 < m^2 + 3m + 2 \quad (\text{kedua ruas dibagi 2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 2}{2} < \frac{m^2 + 3m + 2}{2}.$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

c. Akan ditunjukkan  $\frac{m^2+3m+2}{2} < 1 + m + m^2$ .

Perhatikan bahwa,

$$1 < m$$

(kedua ruas dikali dengan  $m$ )

$$\Leftrightarrow 1 \cdot m < m \cdot m$$

$$\Leftrightarrow m < m^2$$

(kedua ruas ditambah  $m^2 + 1$ )

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 1 < 2 + 2m + 2m^2$$

(kedua ruas dibagi 2)

$$\Leftrightarrow \frac{m^2+3m+1}{2} < 1 + m + m^2.$$

d. Akan ditunjukkan  $1 + m + m^2 < 1 + 3m + m^2$ .

Perhatikan bahwa, untuk  $m \geq 6$

$$m < 3m$$

(kedua ruas ditambah  $m^2 + 1$ )

$$\Leftrightarrow 1 + m + m^2 < 1 + 3m + m^2.$$

Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik pada graf  $sp(m, 1, 3)$  memiliki bobot yang berbeda. Dapat disimpulkan bahwa  $tvs(sp(m, 1, 3)) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ . Berdasarkan paparan di atas diperoleh bahwa  $tvs(sp(m, 1, 3)) \geq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$  dan  $tvs(sp(m, 1, 3)) \leq \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ . Maka terbukti bahwa  $tvs(sp(m, 1, 3)) = \left\lceil \frac{3m+2}{3} \right\rceil$ . ■



## BAB III

### METODE PENELITIAN

Penyelesaian tugas akhir ini menggunakan studi kepustakaan, dimana informasi-informasi diperoleh dari buku dan jurnal yang berkaitan dengan penelitian. Terdapat beberapa tahapan untuk menentukan nilai total ketakteraturan titik graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$ :

1. Diberikan graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$ , dimana  $m$  adalah *longitude* pada setiap graf theta,  $r$  adalah jumlah titik berderajat 2 yang merentang pada setiap *longitude*, pada 4 graf theta seragam. Dimisalkan untuk  $sp(10, 3, 4)$ , maka terdapat 10 *longitude* pada setiap graf theta, 3 titik pada setiap *longitude*, pada 4 graf theta seragam.
2. Menentukan batas bawah dari  $tv_s(sp(m, r, 4))$  dengan menganalisa struktur graf  $sp(m, r, 4)$ .
3. Menentukan batas atas  $tv_s(sp(m, r, 4))$  dengan menunjukkan adanya pelabelan- $k$  total tak teratur pada graf, dan  $k$  adalah batas bawah yang diperoleh pada langkah 2. Agar mendapat pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 dilabeli mulai dari  $3, 4, 5, \dots, i + 2$ . Akan ditampilkan pelabelan- $k$  total tak teratur titik untuk graf  $sp(m, r, 4)$  dengan  $5 \leq m \leq 7$  dan  $3 \leq r \leq 5$ .
4. Menentukan rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi dari graf  $sp(m, r, 4)$ , dengan mengacu pada pelabelan diperoleh pada langkah 3.
5. Menentukan rumus bobot titik dari  $sp(m, r, 4)$ , dengan mengacu pada rumus yang diperoleh pada langkah 4.
6. Membuktikan bahwa pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan total tak teratur titik dari graf  $sp(m, r, 4)$ , dengan membuktikan bahwa setiap bobot titik pada graf berbeda.
7. Menentukan nilai total ketakteraturan titik dari graf  $sp(m, r, 4)$ , yaitu label terbesar minimum  $k$  sehingga graf  $sp(m, r, 4)$  memiliki pelabelan- $k$  total tak teratur titik.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

8. Mengaplikasikan rumus nilai total ketakteraturan titik dari graf  $sp(m, r, 4)$ , sebagai contoh akan diberikan pelabelan- $k$  total tak teratur titik untuk graf  $sp(15, 1, 4)$ .



## BAB V

### KESIMPULAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari Bab IV, dapat disimpulkan bahwa terdapat pelabelan- $\left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$  total tak teratur titik pada graf seri paralel  $sp(m, r, 4)$  untuk  $m \geq 5$  dan  $r \geq 1$ . Oleh karena itu, terbukti bahwa  $tv_s(sp(m, r, 4)) \geq \left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$ . Batas bawah yang diperoleh juga merupakan batas atas dari  $tv_s(sp(m, r, 4))$ , sehingga terbukti bahwa  $tv_s(sp(m, r, 4)) \leq \left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$ . Dengan terbuktinya kedua hal tersebut, maka diperoleh nilai total ketakaturan titik pada graf  $sp(m, r, 4)$  untuk  $m \geq 5$  dan  $r \geq 1$ , yaitu  $tv_s(sp(m, r, 4)) = \left\lceil \frac{4mr+2}{3} \right\rceil$ .

#### 5.2 Saran

Penelitian terkait nilai total ketakaturan graf terus berkembang dan terdapat banyak jenis-jenis graf lainnya yang terbuka untuk dikaji. Penelitian untuk nilai total tak teratur titik pada graf seri paralel juga dapat dikaji lanjut, sehingga nantinya dapat memperoleh nilai total ketakaturan titik pada graf  $sp(m, r, l)$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] C.C. Marzuki dan Y. Febrinanda, “Nilai Total Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali  $Comb P_m$  dan  $C_4$ ”, Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 3, No. 2, Hal 8-15, 2017.
- [2] G. Chartrand, M. Jacobson, J. Lehel, O. Oellermann, S. Ruiz dan F. Saba, “Irregular Networks”, *Congressus Numerantium*, Vol. 64, Hal 197-210, 1988.
- [3] I. Rajasingh dan S. T. Arockiamary, “Total Edge Irregularity Strength of Series Parallel Graphs”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 99, No.1, Hal 11-21, 2015.
- [4] J. A. Bondy dan U. S. R Murty, “Graph Theory with Applicants”, *The Macmillan Press Ltd.*, Inggris Raya, 1976.
- [5] J. A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labeling”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, No. 14, 2011.
- [6] K.H. Rosen, “Discrete Mathematics and Its Applications”, Mc Graw Hill, New York, 2007.
- [7] L. Yuliarti, 2019, “Nilai Total Ketakteraturan Titik pada Graf Seri Paralel  $(m, 1, 3)$ ”, Skripsi. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim: Riau.
- [8] M. Bača, S. Jendrol, M. Miller dan J. Ryan, “On Irregular Total Labellings”, *Discrete Mathematics*, No. 307, Hal 1378-1388, 2007.
- [9] N. Hinding, W. Aritonang dan A. K. Amir, “Nilai Total Ketidakteraturan-H pada Graf  $C_n \times P_3$ ”, *Prosiding Seminar Nasional*, Vol. 04, No. 1, Hal 217-223, 2010.
- [10] R. Munir, “Matematika Diskrit”, Penerbit Informatika, Bandung, 2005.
- [11] R. Ramdani, “Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua Copy Graf Bintang”, *Jurnal Kajian Islam, Sains dan Teknologi (ISTEK)*, Vol. 8, No. 2, Hal 1-16, 2014.



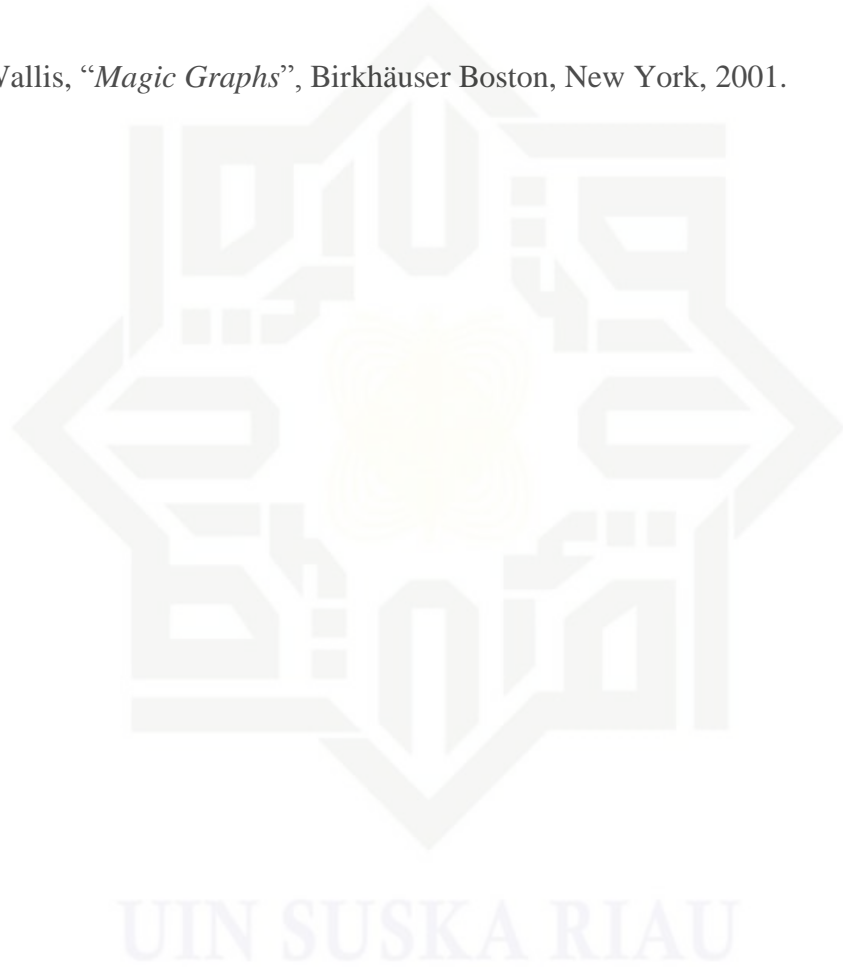
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumpukan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

- [12] Riskawati, Nurdin dan Hasmawati, “Nilai Total Ketidakteraturan Titik pada Graf *Series Parallel*”, *Axiomath: Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol. 1, No. 2, Hal 1-5, 2019.
- [13] T. Winarsih dan D. Indriati, “*Total Edge Irregularity Strength of (n,t)-Kite Graph*”, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 1008, No. 012049, 2018.
- [14] W. D. Wallis, “*Magic Graphs*”, Birkhäuser Boston, New York, 2001.



## DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 14 April 1998 di Pekanbaru, sebagai anak keempat dari tujuh bersaudara dari pasangan Bapak Ahmiyul Rauf dan Ibu Khaidar Syafni. Penulis menyelesaikan pendidikan formal Sekolah Dasar di *International Islamic School Malaysia*, Malaysia pada tahun 2010. Pada tahun 2013, penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di *International Islamic School Malaysia*, Malaysia dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di Sekolah Islam Terpadu Al-Fityah, Pekanbaru pada tahun 2016 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Fakultas Sains dan Teknologi, dengan Program Studi Matematika.

Pada tahun 2018, penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Unit Pelaksana Teknis Metrologi Legal Dinas Perdagangan dan Perindustrian Kota Pekanbaru dari tanggal 21 Januari hingga 21 Februari 2018 dan menghasilkan laporan Kerja Praktek dengan judul **“Deskriptif Jumlah Pelayanan Tera dan Tera Ulang Tangki Ukur Mobil Tahun 2018 (Studi Kasus: Unit Pelaksana Teknis Metrologi Legal Dinas Perdagangan dan Perindustrian Kota Pekanbaru)”** yang dibimbing oleh Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc. Pada Juli 2019, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sungai Paku, Singingi Hilir, Kuantan Singingi.

Pada 5 Februari 2021, penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **“Nilai Total Ketakteraturan Titik Dari Graf Seri Paralel ( $m, r, 4$ )”** di bawah bimbingan Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si.